

3.7.3 Déterminer la position relative de la sphère $\Sigma : (x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-10)^2 = 25$ et de la droite $d : \frac{x-7}{6} = \frac{y+4}{-6} = z-5$.

$$\bullet (d) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\bullet C(3; 5; 10)$$

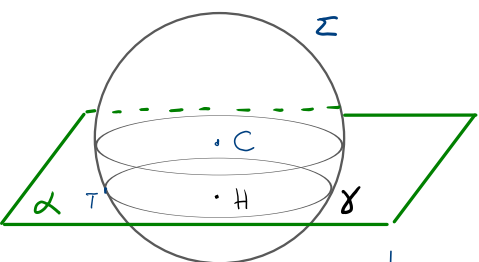
$$\bullet S(d, C) = 7 > \underbrace{5}_{\text{rayon}} \quad \text{☹} \quad \bar{a} \text{ calculer}$$

donc Σ et d sont gauches.

3.7.4 Le système d'équations
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \quad (1)$$
 détermine-t-il un cercle? Si oui, calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

(2)

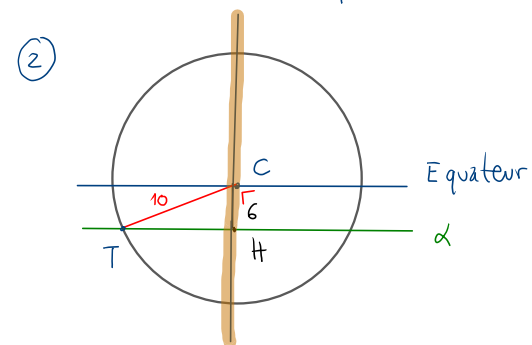
$$\Sigma: C(3; -2; 1), R = 10$$



Soit H le centre de γ , s'il existe

(1)
$$d(\alpha, C) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) - 1 + 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{18}{3} = 6 < 10 = R$$

Donc α coupe Σ .



Rayon du cercle γ

$$TH^2 = CT^2 - CH^2 \quad (\text{Pythagore})$$

$$r^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$\Rightarrow r = 8$$

Pour trouver H , centre de γ , on calcule l'intersection de la droite CH avec α .

(CH):
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

(α):
$$2x - 2y - z + 9 = 0$$

Par substitution:

$$2(3+2k) - 2(-2-2k) - (1-k) + 9 = 0$$

$$6 + 4k + 4 + 4k - 1 + k + 9 = 0$$

$$9k + 18 = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

$$\Rightarrow H(-1; 2; 3)$$

3.7.5 Montrer que les deux sphères d'équations :

$$(\Sigma_1) : x^2 + y^2 + z^2 = 81 \quad \text{et} \quad (\Sigma_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$$

sont tangentes intérieurement et déterminer l'équation cartésienne de leur plan tangent commun.

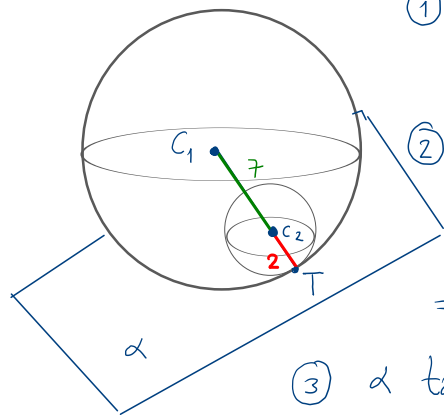
• Σ_1 : $C_1(0, 0, 0)$ et $R_1 = 9$

• Σ_2 : $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 + z^2 + 6z + 9 = -45 + 4 + 36 + 9$

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2 = 4$$

$C_2(2; 6; -3)$ et $R_2 = 2$

① $\|\vec{C_1C_2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+36+9} = 7$



② $\|\vec{C_1C_2}\| + R_2 = R_1$

$$7 + 2 = 9$$

$\Rightarrow$ Tangentes intérieurement

③ α tangent au 2 sphères en T

La droite C_1C_2 est perpendiculaire à α :

(α) : $2x + 6y - 3z + d = 0$

$S(C_1, \alpha) = 9$: $\frac{|d|}{7} = 9 \Leftrightarrow |d| = 63 \Rightarrow d = \pm 63$

On obtient : (α_1) : $2x + 6y - 3z - 63 = 0$

(α_2) : $2x + 6y - 3z + 63 = 0$

Il faut que $S(C_2, \alpha) = 2$, $C_2(2; 6; -3)$

• $S(C_2, \alpha_1) = \frac{|4 + 36 + 9 - 63|}{7} = \frac{14}{7} = 2$, c'est α_1 .

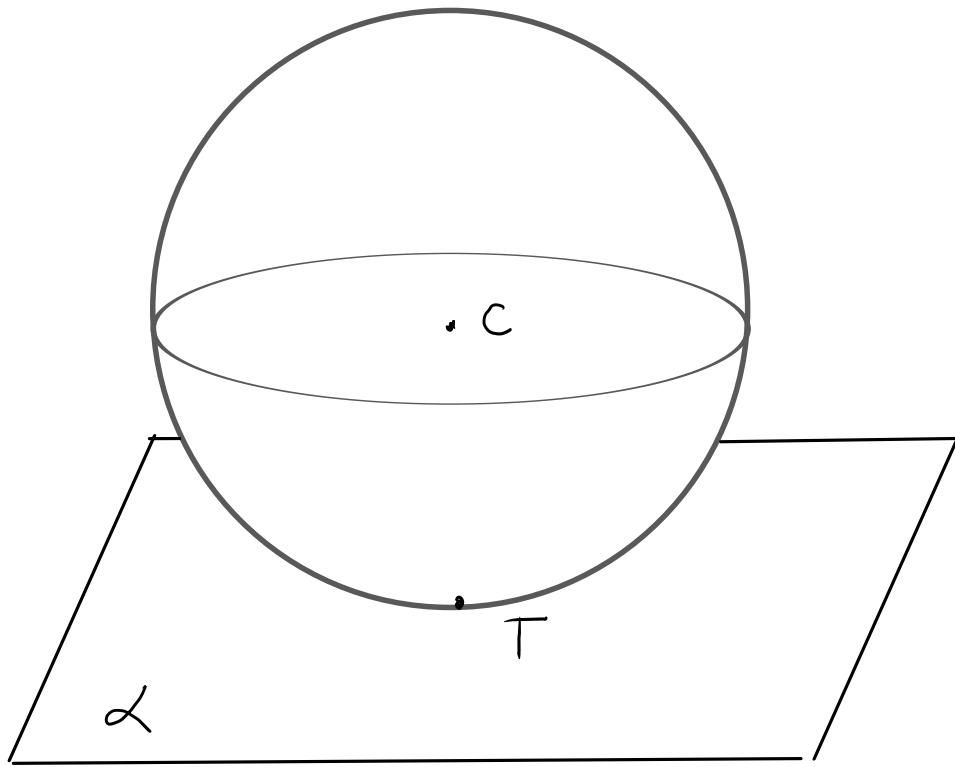
• $S(C_2, \alpha_2) = \frac{|4 + 36 + 9 + 63|}{7} = \frac{112}{7} = 16$

Le plan cherché est $2x + 6y - 3z - 63 = 0$.

3.7.6 On donne la sphère Σ et le point T . Après avoir vérifié que T appartient à Σ , trouver l'équation cartésienne du plan tangent à Σ au point T :

a) $\Sigma : (x + 3)^2 + (y - 15)^2 + (z - 2)^2 = 225$

$T(7; 4; 4)$,



$C(-3; 15, 2)$ et $R = 15$

$$\textcircled{1} \quad (7+3)^2 + (4-15)^2 + (4-2)^2$$

$$= 100 + 121 + 4 = 225$$

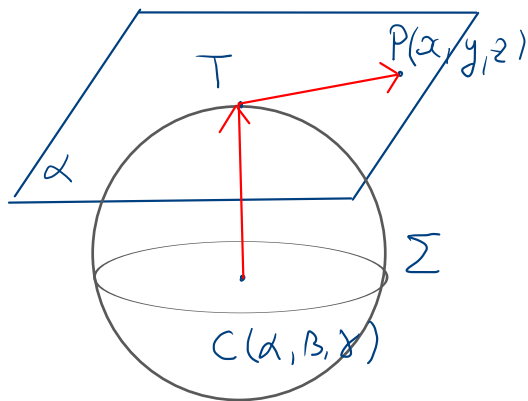
$T \in \Sigma$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{CT} \perp \alpha : \quad \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(\alpha): 10x - 11y + 2z + d = 0$

Par T : $70 - 44 + 8 + d = 0 \Rightarrow d = -34$

$(\alpha): 10x - 11y + 2z - 34 = 0$



- $T(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$
- $\Sigma(C, R)$
- $P(x, y, z) \in \alpha$

On a $\vec{CT} \perp \vec{TP} \Leftrightarrow \vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0 \Leftrightarrow \vec{CT} \cdot (\vec{CP} - \vec{CT}) = 0$
 $\Leftrightarrow \vec{CT} \cdot \vec{CP} = \underbrace{\vec{CT} \cdot \vec{CT}}_{\|\vec{CT}\|^2} \Leftrightarrow \vec{CT} \cdot \vec{CP} = R^2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 - \beta \\ z_0 - \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \\ z - \gamma \end{pmatrix} = R^2$$

page 67

Plan tangent en un point T

$$\vec{CT} \cdot \vec{TP} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = 0 \quad \oplus$$

$$\vec{CT} \cdot \vec{CP} = r^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = r^2 \quad \oplus$$

$$\Leftrightarrow (2): (x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) + (z_0 - \gamma)(z - \gamma) = R^2$$

b) $\Sigma: (x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 3)^2 = 289$

$\Rightarrow T(14; 4; -6),$

ou

$$(\Sigma): \begin{matrix} (x-2)(x-2) & + & (y+4)(y+4) & + & (z-3)(z-3) & = & 289 \\ \downarrow 14 & & 4 \downarrow & & -6 \downarrow & & \end{matrix}$$

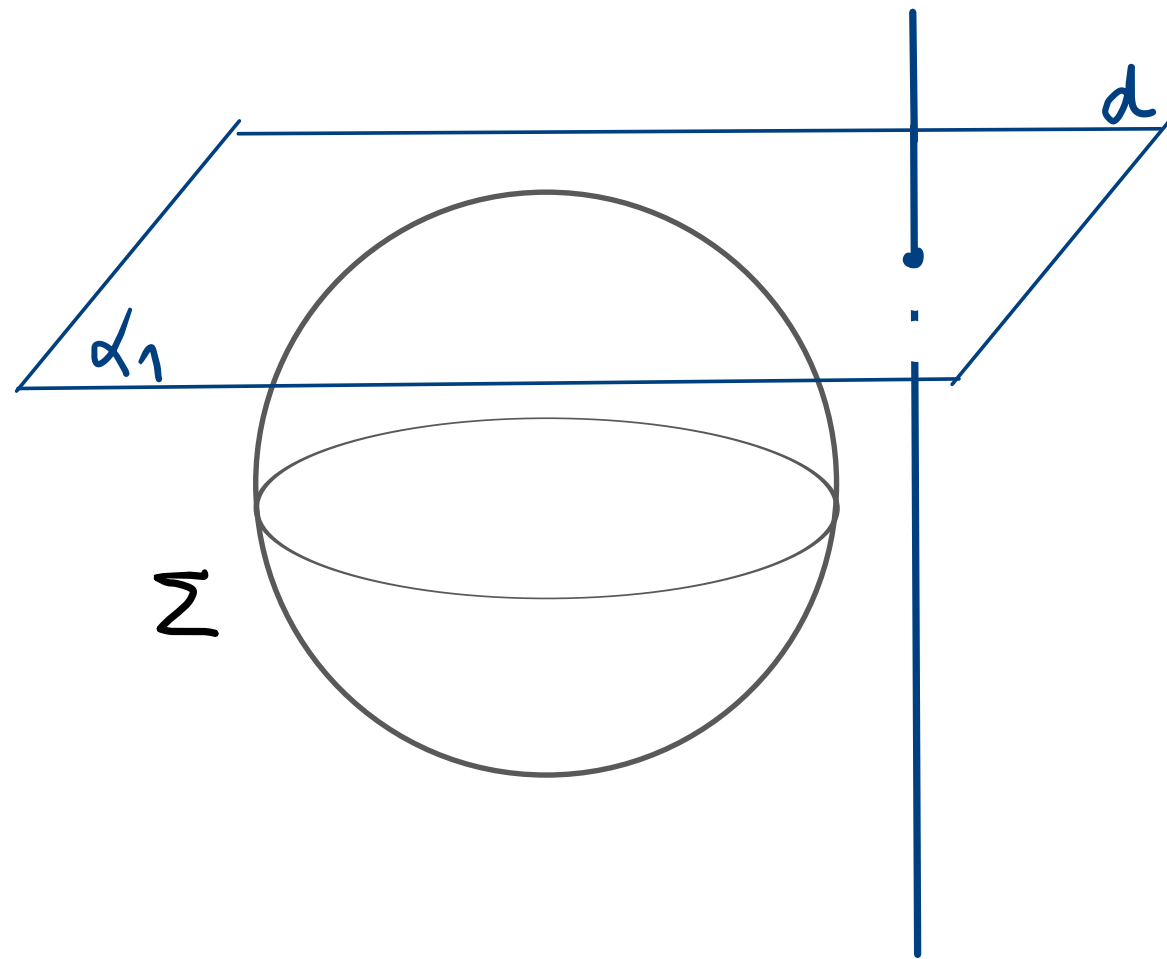
$$(\alpha): 12(x-2) + 8(y+4) + (-9)(z-3) = 289$$

$$(\alpha): 12x + 8y - 9z - 254 = 0$$

3.7.7 On donne la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 216$, ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations cartésiennes des plans perpendiculaires à d et tangents à Σ , ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ .



- $d_1 \perp d$

- d_1 tangent à Σ