

1.2.3 On munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2

$$M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

des opérations usuelles :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Prouver que, muni des deux opérations ci-dessus, $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ; préciser l'élément neutre de l'opération $+$ et l'opposé d'une matrice donnée.

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit deux sous-ensembles:

$$\textcircled{1} \quad E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \right\}$$

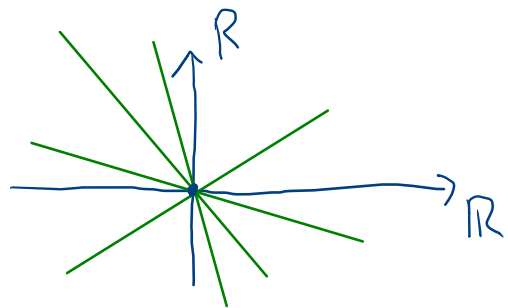
$$\textcircled{2} \quad P = \left\{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

E et P , munis de l'addition et de la multiplication par un scalaire usuelles, sont-ils de ev ?

$\textcircled{1}$ C'est un plan de $\mathbb{R}^3$.

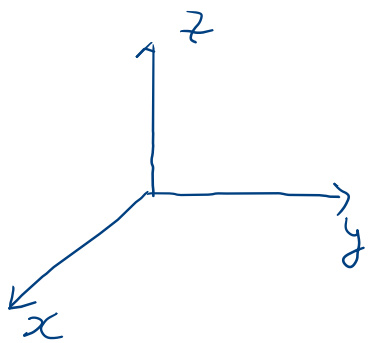
Il n'y a pas d'élément neutre dans E .

$$e = (0, 0, 0) \notin E$$



Dans $\mathbb{R}^2$:

- (i) $(0, 0)$
- (ii) Les droites qui passent par $(0, 0)$
- (iii) $\mathbb{R}^2$ le plan



Dans $\mathbb{R}^3$:

- (i) $(0, 0, 0)$
- (ii) Les droites qui passent par $(0, 0, 0)$
- (iii) les plans qui contiennent $(0, 0, 0)$
- (iv) $\mathbb{R}^3$

$P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ est un ev.

On démontre que P est un groupe commutatif.

- $(ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)$
 $= (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)$

- $\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = \alpha ax^2 + \alpha bx + \alpha c$

① commutativité: $(ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)$
 $= (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)$
 $= (d+a)x^2 + (e+b)x + (f+c)$
 $= (dx^2 + ex + f) + (ax^2 + bx + c)$

② Associativité: ...

③ Elément neutre: $p = 0$ est l'élément neutre

④ Symétrique: $(ax^2 + bx + c) + (-ax^2 - bx - c) = 0$

⑤ $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$

$$\alpha(\beta(ax^2 + bx + c)) = \alpha(\beta ax^2 + \beta bx + \beta c)$$
$$= \alpha\beta ax^2 + \alpha\beta bx + \alpha\beta c = \alpha\beta(ax^2 + bx + c)$$

⑥ $1 \cdot p = 1 \cdot (ax^2 + bx + c) = p$

⑦ $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$
⑧ $(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$ } par déf. des polynômes

On dit que les polynômes de degré 2 sont les
vecteurs dans cet ev.

Sous-espaces vectoriels

Soit $(V, +, \cdot)$ un ev réel.

Soit $E \subset V$, E non vide.

Si $(E, +, \cdot)$ est ev réel, on dit que

$(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel réel de V .

Théorème

Soit $(V, +, \cdot)$ un ev.

Soit $E \subset V$, E non vide.

$(E, +, \cdot)$ est un sev de V si :

$$\textcircled{1} \quad \forall u, v \in E, \quad u + v \in E$$

$$\textcircled{2} \quad \forall u \in E, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda u \in E$$

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

~~A~~ = $\{(x; y; z) | x = 12\}$

B = $\{(x; y; z) | z = 0\}$

C = $\{(x; y; z) | y = 3x\}$

~~D~~ = $\{(x; y; z) | 2x + y + z = 21\}$

E = $\{(x; y; z) | 3x + 4y - 5z = 0\}$

~~F~~ = $\{(x; y; z) | xy = z\}$

~~G~~ = $\{(x; y; z) | x^2 + y^2 = z^2\}$

H = $\{(x; y; z) | x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\}$

a) $e_1(12; 0; 0)$, $e_2(12, 1, -2)$, $(12, \sqrt{2}, \sqrt{3})$

$e_1 + e_2 = (24; 1, -2) \notin A$

contre-exemple

$2 \cdot e_1 = (24; 0; 0) \notin A$

b) $e_1 = (x; y; 0)$, $e_2 = (a; b; 0) \in B$

• $e_1 + e_2 = (x+a; y+b; 0) \in B$

• $\lambda \cdot e_1 = \lambda(x; y; 0) = (\lambda x; \lambda y; 0) \in B$

c) $e_1 = (x; 3x; z)$ $e_2 = (a; 3a; c)$

$e_1 + e_2 = (x+a; 3(x+a), z+c) \in C$

$\lambda e_1 = (\lambda x; 3\lambda x, \lambda z) \in C$

d) $e_1 = (0; 0; 21)$

contre-exemple

$2e_1 = (0; 0; 42) \notin D$

$$E = \{(x; y; z) | 3x + 4y - 5z = 0\}$$

$$F = \{(x; y; z) | xy = z\}$$

$$G = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 = z^2\}$$

$$H = \{(x; y; z) | x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\}$$

$$f) \quad e_1 = (2; 3; 6) \quad , \quad e_2 = (4; 5; 20)$$

$$e_1 + e_2 = (6, 8, 26)$$

$$\underbrace{\quad}_{48 \neq 26}$$

$$g) \quad e_1 = (1, 0, 1) \quad , \quad e_2 = (0, 1, 1)$$

$$e_1 + e_2 = (1, 1, 2)$$

$$\underbrace{\quad}_{1+1 \neq 4}$$

$$e) \quad e_1 = (x, y, z) \in E \quad : \quad 3x + 4y - 5z = 0$$

$$e_2 = (a, b, c) \in E \quad : \quad 3a + 4b - 5c = 0$$

$$\bullet \quad e_1 + e_2 = (x + a, y + b, z + c)$$

$$3(x + a) + 4(y + b) - 5(z + c)$$

$$= (3x + 4y - 5z) + (3a + 4b - 5c) = 0 + 0 = 0$$

$$\bullet \quad \lambda e_1 = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$3\lambda x + 4\lambda y - 5\lambda z = \lambda(3x + 4y - 5z) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$h) \quad e_1 = (x, y, z) \quad : \quad x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Leftrightarrow e_1 = (x, 2x, 3x)$$

$$e_2 = (a, b, c) \quad : \quad a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \Leftrightarrow e_2 = (a, 2a, 3a)$$

$$\bullet \quad e_1 + e_2 = (x + a, y + b, z + c) = (x + a, 2x + 2a, 3x + 3a)$$

$$x + a = \frac{y}{2} + \frac{b}{2} = \frac{y + b}{2}$$

$$x + a = \frac{z}{3} + \frac{c}{3} = \frac{z + c}{3}$$

$$\bullet \quad \lambda e_1 = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, 2\lambda x, 3\lambda x)$$

$$\lambda x = \lambda \frac{y}{2} = \lambda \frac{z}{3}$$

Ende 1.2.10 ; 1.2.8 d)