

3.5.3 Montrer que les équations suivantes définissent toutes le même plan :

$$(\beta): \begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (\alpha): 3x + 3z = 39 - 6y$$

$$(\gamma): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha): 3x + 6y + 3z - 39 = 0 \quad | \div 3$$

$$(\alpha): x + 2y + z - 13 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases} \begin{array}{c} \lambda \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \begin{array}{c} \lambda \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 - \mu \\ y + z = 6 + \mu \end{cases} \begin{array}{c} \mu \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

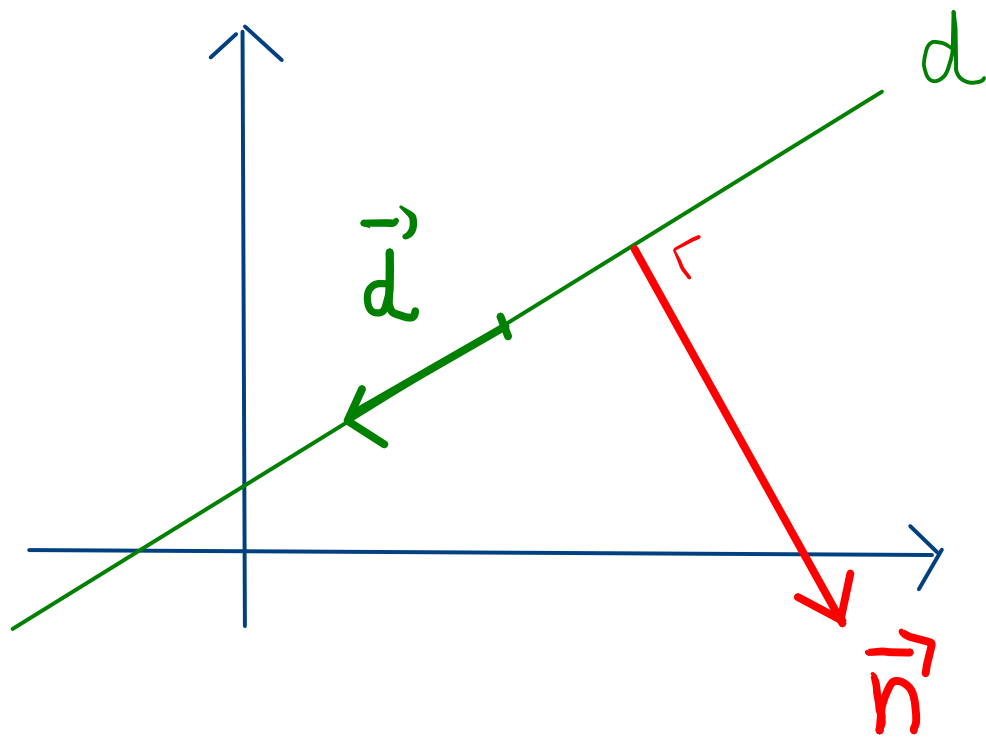
$$(\beta): x + 2y + z = 13 \Rightarrow \beta \equiv \alpha$$

$$(\gamma): \begin{cases} x = 0 + \kappa \\ y = 0 + t \\ z = 13 - \kappa - 2t \end{cases} \begin{array}{c} \kappa \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 13 - 2t \\ y = t \end{cases} \begin{array}{c} t \\ \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$(\gamma): x + 2y + z = 13 \Rightarrow \gamma \equiv \beta \equiv \alpha$$

Vecteur normal $\vec{n}$ à une droite dans le plan



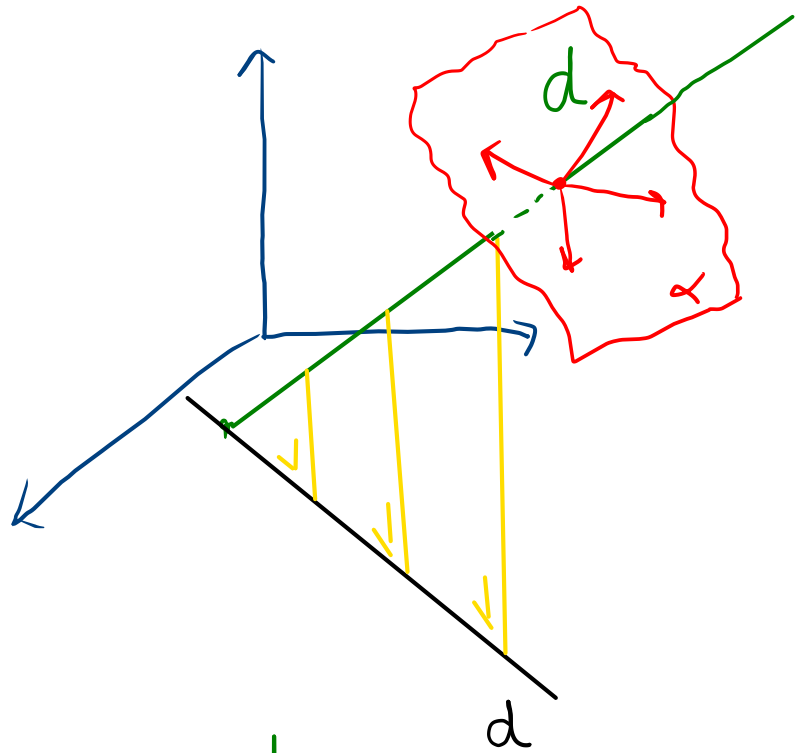
$$m = -\frac{a}{b} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$(d): ax + by + c = 0$$

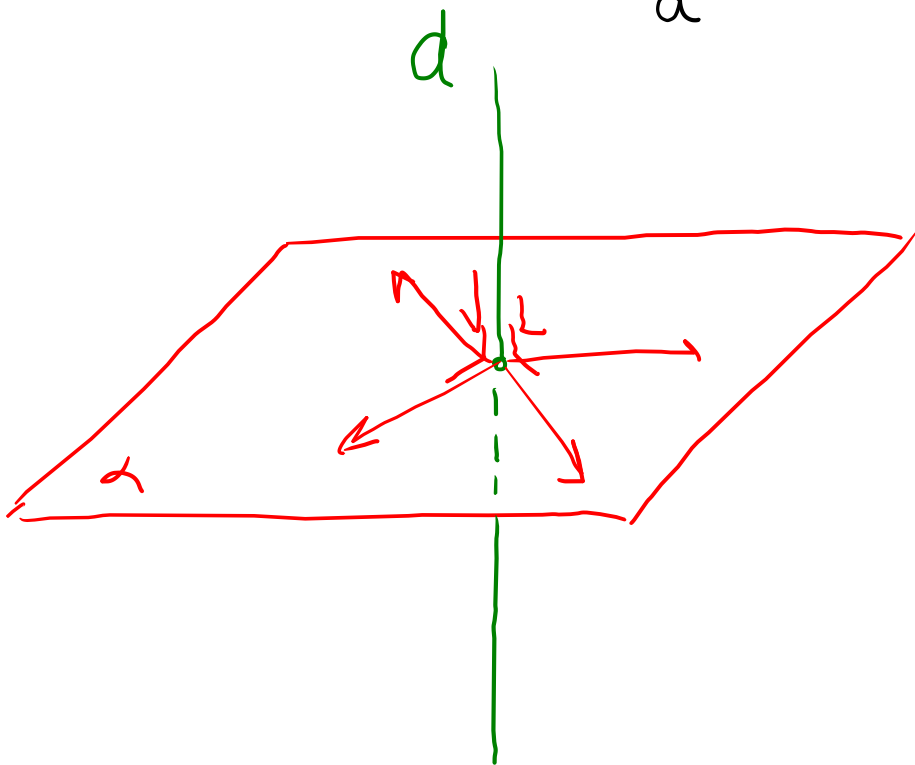
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

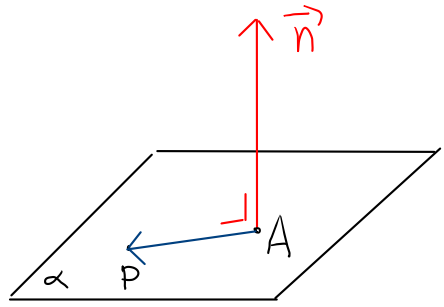
Vecteur normal $\vec{a}$ une droite dans l'espace.



Il existe une infinité
de vecteurs normaux
 $\vec{a}$ une droite donnée



Vecteur normal à un plan dans l'espace



$$(\alpha) : ax + by + cz + d = 0$$

$$A \in \alpha : A(a_1, a_2, a_3)$$

$$P \in \alpha : P(x, y, z)$$

$$\textcircled{1} A \in \alpha : a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3 = -d$$

$$\textcircled{2} \vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ démontrons que } \vec{n} \perp \vec{AP}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{AP} &= a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) \\ &= ax + by + cz - \underbrace{(a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3)}_{-d} \\ &= ax + by + cz + d \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemple $(\alpha) : 3x - y + 2z + \sqrt{2} = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \alpha$$

3.5.5 Déterminer l'équation cartésienne du plan α :

- a) qui passe par $P(2; 1; -1)$ et est normal au vecteur $(1; -2; 3)$;
b) qui passe par $P(-6; 10; 16)$ et est perpendiculaire à la droite

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

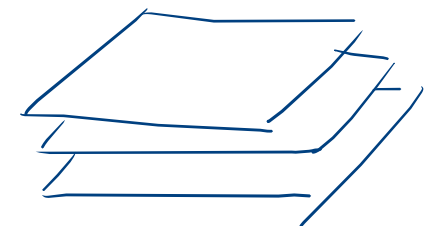
avec $k \in \mathbb{R}$;

- c) qui passe par l'origine et est perpendiculaire au segment AB , avec

$$A(1; 0; 5) \quad \text{et} \quad B(3; -3; 8);$$

$$(\alpha): ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$a) (\alpha): x - 2y + 3z + d = 0$$

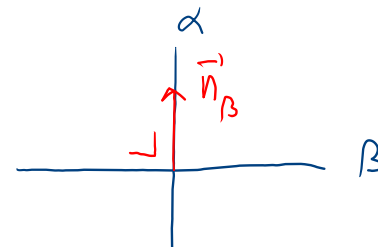


$$P \in \alpha: \quad 2 - 2 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

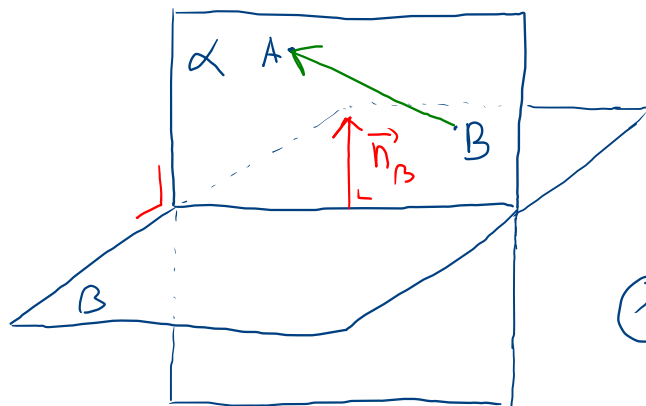
3.5.8 Déterminer l'équation cartésienne du plan ^(α) qui passe par $A(1; -1; 2)$, par $B(3; 1; 1)$ et qui est perpendiculaire au plan $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

^(β)

$$\alpha \perp \beta$$



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & A \in \alpha \\ & B \in \alpha \end{aligned}$$



$$\textcircled{2} \quad (\beta): x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \text{vecteur directeur de } \alpha: \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{vecteur directeur de } \alpha: \vec{h}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha) \quad \begin{cases} x = 1 + 2k + t \\ y = -1 + 2k - 2t \\ z = 2 - k + 3t \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} k & t \\ \hline \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot (-1) & \cdot 1 \\ \cdot 2 & \cdot 2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 + 3t \\ y + 2z = 3 + 4t \end{cases} \quad \begin{array}{c} \cdot 4 \\ \cdot (-3) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 7y - 6z = -1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha): 4x - 7y - 6z + 1 = 0$$

$A(1; -1; 2)$, par $B(3; 1; 1)$