

Les matrices

27.08.26

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					

Tableau 4 lignes et 5 colonnes

Produit scalaire dans V_3

$$V_1 = (a_1, a_2, a_3) \quad , \quad V_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$V_1 \cdot V_2 = \underbrace{(a_1 \ a_2 \ a_3)}_{\substack{\text{1 ligne} \\ \text{3 colonnes} \\ 1 \times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{3 lignes} \\ \text{1 colonne} \\ 3 \times 1}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}$$

Définition

Soit m, n deux entiers non nuls.

Une matrice réelle de type $m \times n$ est un tableau rectangulaire qui contient m lignes et n colonnes de nombres réels, appelés les éléments de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{colonnes} \end{matrix} \quad M_{3 \times 4}[\mathbb{R}]$$

L'ensemble des matrices $m \times n$ s'écrit $M_{m \times n}[\mathbb{R}]$

On écrit la matrice A ainsi :

$$A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}[\mathbb{R}]$$

$$a_{12} = 2 \quad ; \quad a_{21} = 3 \quad ; \quad a_{33} \text{ n'existe pas}$$

$$a_{22} = 4 \quad ; \quad a_{13} \text{ n'existe pas} \quad ; \quad a_{31} = 5$$

$$a_{11} = 1 \quad ; \quad a_{32} = 6$$

Opération sur les matrices

① Multiplication d'un nombre et d'une matrice

$$A \in M_{m \times n}[\mathbb{R}], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Définissons $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$

Exemple

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot A$$

λ est appelé scalaire.

② Addition de matrices

Soit $A, B \in M_{m \times n}[\mathbb{R}]$, on définit $A + B$ ainsi :

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

③ Multiplication matricielle

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \textcircled{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \textcircled{3} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \textcolor{red}{3} \times \textcircled{3} & \textcircled{3} \times \textcolor{green}{2} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 3 & -4 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\in M_{\textcolor{red}{3} \times \textcolor{green}{2}}[\mathbb{R}]$$

A

B

B

A n'existe pas !

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{2} \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{5} & 6 \\ \underline{7} & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

H

$$\begin{pmatrix} \underline{5} & \underline{6} \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 \\ \underline{3} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

La multiplication matricielle n'est pas commutative

1.1.1 Calculer, quand cela est possible, les produits AB et BA suivants :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.3 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 telles que $AB = BA$.

Posons $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\textcircled{1} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ c+d & -c+d \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{a}-c = \cancel{a}+b \\ a+\cancel{c} = \cancel{c}+d \\ \cancel{b}-d = -\cancel{a}+\cancel{b} \\ b+\cancel{d} = -c+\cancel{d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = d \\ -d = -a \\ b = -c \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.1.2 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : AB , AC , $AB+AC$, $B+C$, $A(B+C)$, $A+B$, $(A+B)^2$, A^2 , B^2 , $A^2+2AB+B^2$, C^2 , C^3 et C^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A^2 + \underbrace{AB + BA}_{\neq 2AB} + B^2 \neq \end{aligned}$$