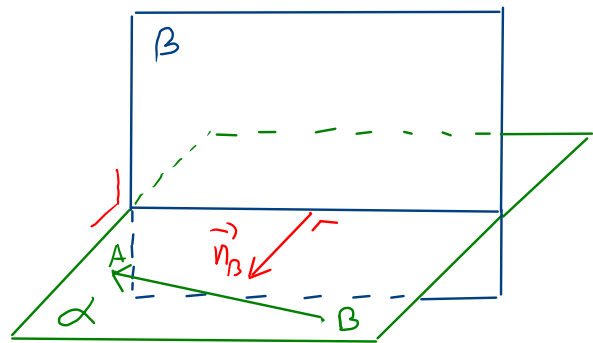


3.5.8 Déterminer l'équation cartésienne du plan α qui passe par $A(1; -1; 2)$, par $B(3; 1; 1)$ et qui est perpendiculaire au plan β $x - 2y + 3z - 5 = 0$.



$\alpha \perp \beta$

$$(\beta): x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{OA} + k \vec{AB}$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k + t \\ y = -1 + 2k - 2t \\ z = 2 - k + 3t \end{cases} \quad \begin{vmatrix} k \\ \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} k \\ \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 5 + 7t \\ y + 2z = 3 + 4t \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 4 \\ \cdot (-7) \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 7y - 6z = -1 \quad \Leftrightarrow (\alpha): 4x - 7y - 6z + 1 = 0$$

$A(1; -1; 2)$, par $B(3; 1; 1)$

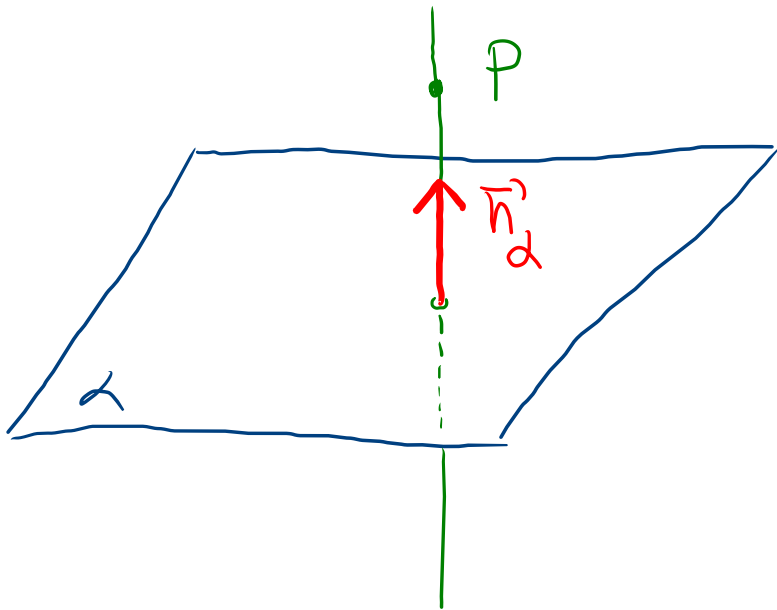
perpendiculaire

 α

3.5.9 Déterminer une équation paramétrique de la normale d au plan d'équation $6x - 3y + 5z + 2 = 0$ issue du point $P(2; -3; -5)$.

$$(\alpha): 6x - 3y + 5z + 2 = 0$$

$$P(2; -3; -5) \notin \alpha$$


 $\vec{n}_\alpha \perp \alpha$

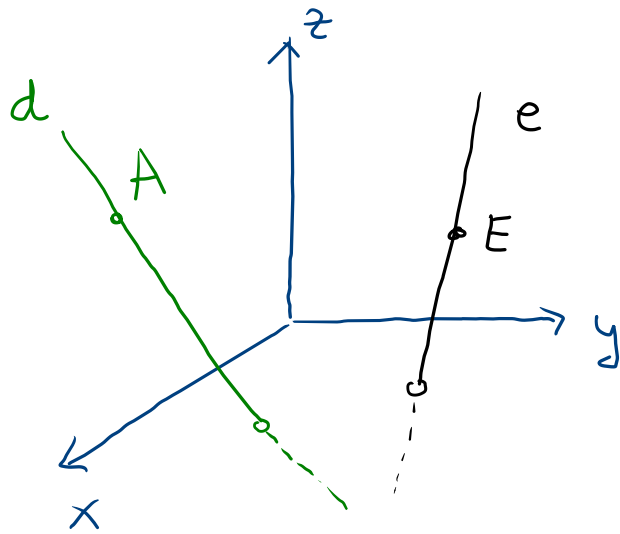
$$(d): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

3.5.10 Former ^{une} l'équation cartésienne du plan ^α qui passe par $M(1; 2; -3)$ et qui est parallèle aux droites

$$d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{OA}}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{OB}}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}}$

avec $k, l \in \mathbb{R}$.



$$(\alpha): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{OM}$ $\vec{d}$ $\vec{e}$

$$(\alpha): \begin{cases} x = 1 + 2k + 3t \\ y = 2 - 3k - 2t \\ z = -3 + 3k - t \end{cases}$$

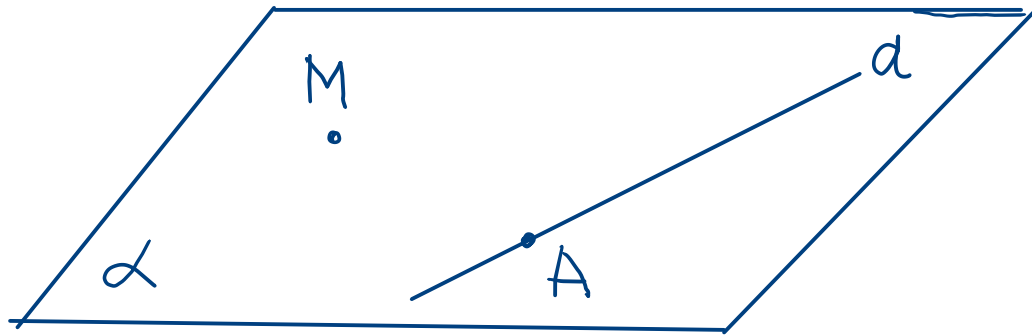
...

$$(\alpha): 9x + 11y + 5z - 16 = 0$$

3.5.11 Déterminer ^{une} l'équation cartésienne du plan α contenant le point $M(2; -2; 1)$ et la droite

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = -3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{OA}} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$$

avec $k \in \mathbb{R}$.



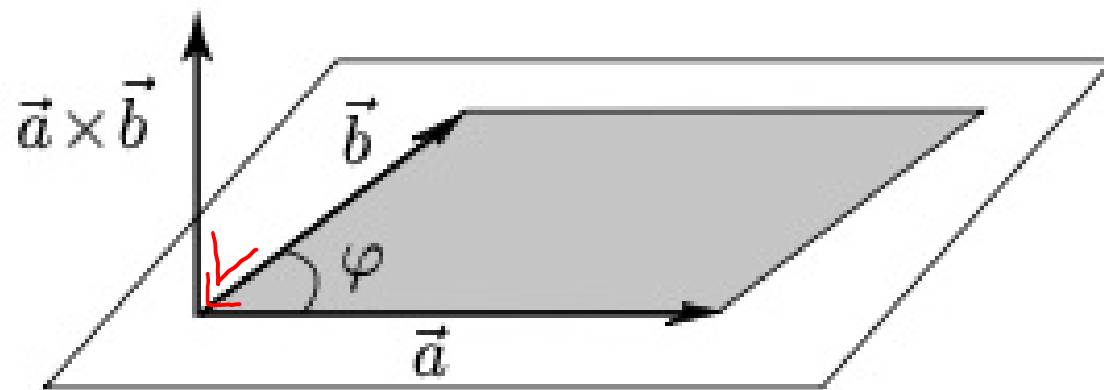
- $M \in \alpha$
- $d \subset \alpha$

$$(X): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{d}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{AM}} \dots$$

Produit vectoriel de deux vecteurs

page 52

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \begin{cases} \vec{a} \\ \vec{b} \end{cases}$$



$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \text{Aire}(\#(\vec{a}, \vec{b}))$$

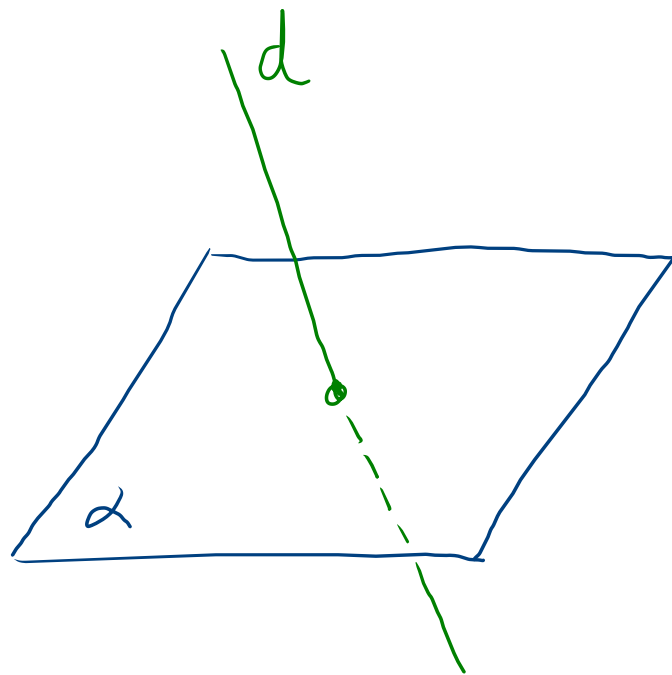
Composantes du produit vectoriel

$$\text{Si } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

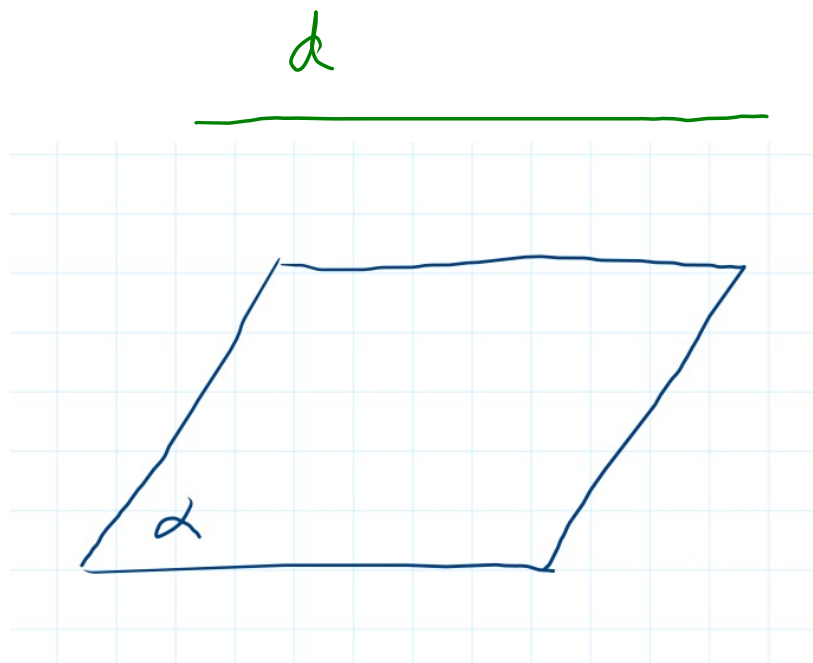
3.5.12 Une droite et un plan sont donnés par leurs équations. Déterminer si ils sont concourants, parallèles ou inclus l'un dans l'autre et, selon les cas, leur intersection.

a) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \alpha: 2x + y - z + 15 = 0$

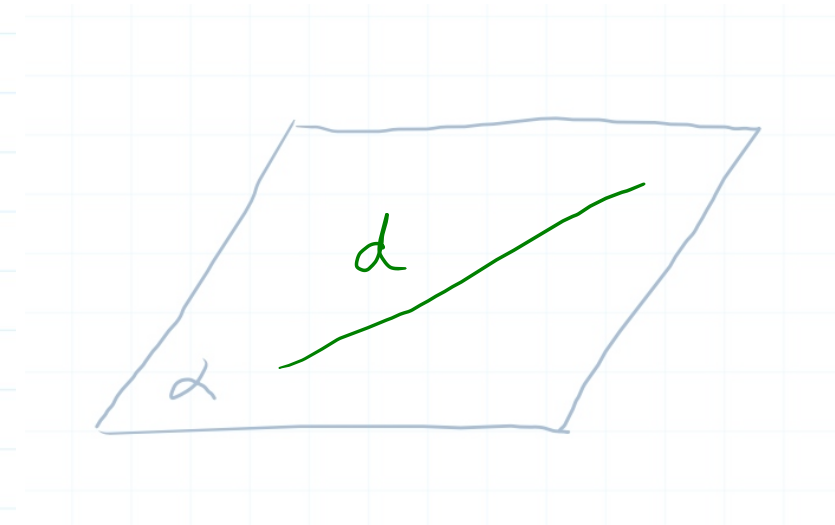
Position d'un plan et d'une droite



sécants

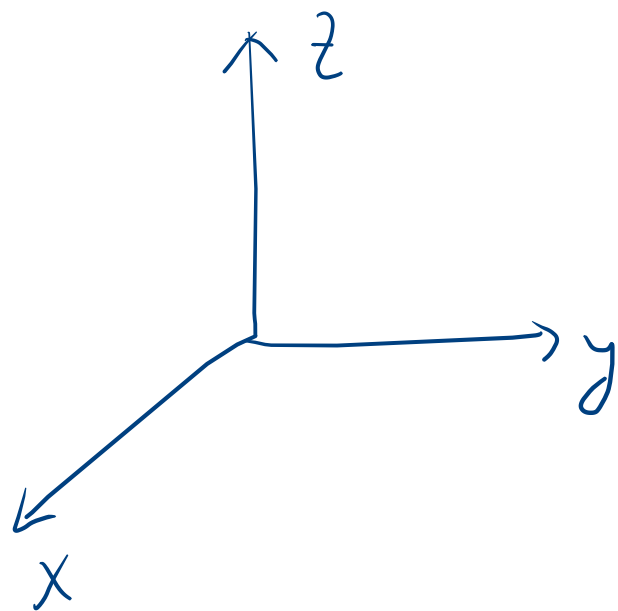


parallèles



$d \subset \alpha$

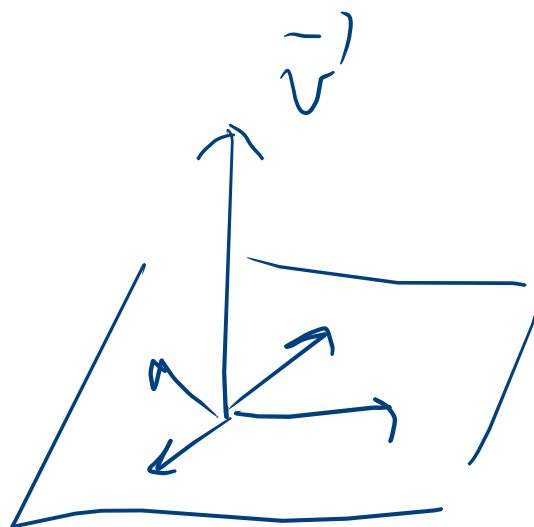
d contenue dans α



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



3.5.12 Une droite et un plan sont donnés par leurs équations. Déterminer si ils sont concourants, parallèles ou inclus l'un dans l'autre et, selon les cas, leur intersection.

a) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \alpha: 2x + y - z + 15 = 0$

(d) :
$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(3 + 2k) + (5 - 2k) - (3 + 2k) + 15 = 0$$

$8 = 15 \Rightarrow$ parallèle

$$b) \quad d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$

$$\alpha: 2x + 3y + z - 1 = 0$$

$$(d): \begin{cases} x = 1 + \kappa \\ y = -1 - 2\kappa \\ z = 0 + 6\kappa \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{I}(2; -3; 6)$$

$$2(1+\kappa) + 3(-1-2\kappa) + (0+6\kappa) - 1 = 0$$

$$\underline{2} + \underline{2\kappa} - \underline{3} - \underline{6\kappa} + \underline{6\kappa} - \underline{1} = 0$$

$$2\kappa = 2 \Rightarrow \boxed{\kappa = 1}$$

3.5.15 Démontrer que les plans d'équations $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ et $x + 2y + 3z - 1 = 0$ ont une droite commune dont on donnera les équations cartésiennes.

$$(\alpha) : 7x + 4y + 7z + 1 = 0$$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(\beta) : 2x - y - z + 2 = 0$$

$$\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\gamma) : x + 2y + 3z - 1 = 0$$

$$\vec{n}_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

