28.10.26

I Soit f est une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, alors si $x \in [a, b]$, la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur I et sa dérivée est f.

$$F'(x) = f(x)$$

II Si f est continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$= F(x)\Big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b$$

III Si F_1 et F_2 sont des primitives de f, alors

$$\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = F_1'(x) - F_2'(x)$$

$$= f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = \text{constante}$$

$$\boxed{F_1(x) = F_2(x) + \text{constante}}$$

Ex: $f(x) = x^2 + 1$

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 2$$

$$F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 1$$

2.2.3 Calculer :

a) $\int 3\,dx = 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = 3$, $(3x + C)' = 3$

b) $\int 5x\,dx = \frac{5}{2}x^2 + C$

$f(x) = 5x$, $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + C$

g) $\int (-3x^4)\,dx = -\frac{3}{5}x^5 + C$

candidat : $(Kx^5)' = K \cdot 5x^4 = \boxed{5K} \cdot x^4$

$= \boxed{-3}\, x^4$

$5K = -3 \Rightarrow K = \frac{-3}{5}$

i) $\int (\cos(x) + \sin(x))\,dx = \sin(x) - \cos(x) + C$

$f(x)$	$F(x)$
K	Kx
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$

$n \in \mathbb{R}^*, \quad n \neq -1$

2.2.4 Calculer :

- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$
- $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$

a) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx$

b) $\int \frac{2dx}{x^3} = 2\cdot\int x^{-3}\,dx = \int 2x^{-3}\,dx = -x^{-2} + c$

$= \frac{-1}{x^2} + C$

candidat : Kx^{-2}

$(Kx^{-2})' = K\cdot(-2)\,x^{-3} = -2Kx^{-3}$

$-2K = 2 \Rightarrow K = -1$

e) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

candidat : $Kx^{\frac{4}{3}}$

$(Kx^{\frac{4}{3}})' = K\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow K = \frac{3}{4}$

$K\cdot\frac{4}{3} = 1$

Formules

① $\int K f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx$

② $\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

d) $\int (2x-1)^2\,dx$ $= \frac{1}{6}(2x-1)^3 + C$

candidat: $K(2x-1)^3$

$\left(K(2x-1)^3\right)' = K \cdot 3 \cdot 2(2x-1)^2$

$= \underbrace{6K}(2x-1)^2$

$6K = 1$