29.10.26

**1.2.13**

a) Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les vecteurs $(1;2;-1)$, $(1;-1;3)$ et $(m;-1;2)$, où $m$ est un nombre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de $m$ forment-ils une famille liée ?

$a$ $b$ $c$

$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ $\quad \lambda_i$ non tous nuls

$\lambda_1(1;2;-1) + \lambda_2(1;-1;3) + \lambda_3(m;-1;2) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c} & \lambda_1 & \lambda_2 \\ & & \\ & \cdot 1 & \cdot 3 \\ & \cdot 2 & \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{①} \begin{cases} \frac{1}{5}\lambda_3 - \frac{3}{5}\lambda_3 + m\lambda_3 = 0 \mid \cdot 5 \\ \lambda_2 = -\frac{3}{5}\lambda_3 \\ \lambda_1 = \frac{1}{5}\lambda_3 \end{cases}$$

① $\lambda_3 - 3\lambda_3 + 5m\lambda_3 = 0$

$(5m-2)\lambda_3 = 0$ $\quad \lambda$

Si $m = \frac{2}{5}$

$1\cdot(1;2;-1) + (-3)(1;-1;3) + 5\left(\frac{2}{5};-1;2\right) = 0$

$2(1;2;-1) + (-6)(1;-1;3) + 10\left(\frac{2}{5};-1;2\right) = 0$

**1.2.16** Soit $A = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $f$, $g$, $h$ trois éléments de $\mathcal{F}_A$ définis par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{3}{x-1} \qquad h(x) = \frac{1}{2x+2}$$

La famille $(f; g; h)$ est-elle libre ?

$$\lambda_1 \frac{2x+1}{x^2-1} + \lambda_2 \frac{2x+1}{x^2-1} + \lambda_3 \frac{1}{2x+2} = 0$$

$$\lambda_1 \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} + \lambda_2 \frac{3}{x-1} + \lambda_3 \frac{1}{2(x+1)} = 0 \quad \Big| \cdot 2(x+1)(x-1)$$

$$2\lambda_1(2x+1) + 2\lambda_2 \cdot 3(x+1) + \lambda_3 \cdot (x-1) = 0$$

$$4\lambda_1 x + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 x + 6\lambda_2 + \lambda_3 x - \lambda_3 = 0$$

$$(4\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3)x + (2\lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \Big| \cdot 1 \; (\lambda_1) \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & \Big| \cdot (-1) \; (\lambda_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \iff \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \iff \end{cases} \boxed{\begin{cases} \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \end{cases}}$$

$\lambda_3 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 = -2$

$$(-2)\frac{2x+1}{x^2-1} + 1 \cdot \frac{3}{x-1} + 2\frac{1}{2x+1} = 0$$

Donc la famille est liée.

# Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs

Soit $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $V$.

On note $\langle V_1, V_2, \dots, V_n \rangle$ le plus petit sous espace vectoriel de $V$ engendré par la famille.

## Exemples dans $\mathbb{R}^3$

① $V = (1, 2, 3)$ $\quad \langle V \rangle$ est la droite $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

② $V_1 = (1, 2, 3)$ , $V_2 = (-3, 0, 7)$

$\langle V_1, V_2 \rangle$ est un plan $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

# Base d'un espace vectoriel

Une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ d'un ev $V$ est une base si

① $\mathcal{F}$ est libre

② $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = V$

**1.2.17** Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les composantes de $u$ relativement à cette base :

a) $e_1 = (1;1)$ $\quad e_2 = (1;0)$ $\quad u = (0;1)$

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2) = ((1,1), (1,0))$

① libre : $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (0,0)$

$\lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,0) = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

② Générateur : $\lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,0) = (x,y)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = y \\ \lambda_2 = x - y \end{matrix}$$

$$\boxed{y \cdot (1,1) + (x-y)(1,0) = (x,y)}$$

$1 \cdot (1,1) + (-1)(1,0) = (0,1)$

$u = (0,1)$ $\qquad u_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$