

30, 09, 26

Les dérivées

$$d : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto d(f) = \frac{d}{dx}(f) = f'$$

$$d(3x^2) = \frac{d}{dx}(3x^2) = (3x^2)' = 6x$$

$$d\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$d(e^{2x}) = 2 \cdot e^{2x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$d(\ln(\sin(x))) = \frac{d}{dx}(\ln(\sin(x))) =$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\sin(x)} (\sin(x))' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

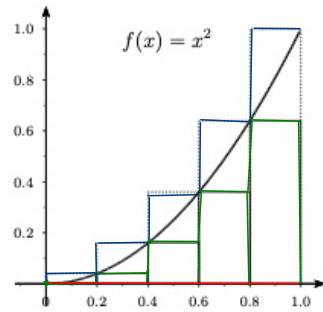
2.1.1 Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$.

On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction représentative de $f(x)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour cela, subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles d'égale longueur.

Newton

Leibniz



- a) Estimer A à l'aide de la somme u_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessous de la courbe (le premier rectangle est d'aire nulle), puis à l'aide de la somme v_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessus de la courbe.

Subdivision de $[0; 1]$: $\sigma = (0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0)$
de pas 0,2.

Aire inférieure:
$$u_5 = 0,2 \cdot f(0) + 0,2 \cdot f(0,2) + 0,2 \cdot f(0,4) + 0,2 \cdot f(0,6) + 0,2 \cdot f(0,8)$$

$$= 0,2 \left[0 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} \right] = \frac{1}{5} \cdot \frac{30}{25}$$

$$= \frac{6}{25}$$

Aire supérieure
$$V_5 = 0,2 \cdot f(0,2) + 0,2 \cdot f(0,4) + 0,2 \cdot f(0,6) + 0,2 \cdot f(0,8) + 0,2 \cdot f(1)$$

$$= 0,2 \left[\underbrace{f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8)}_{\text{fait partie de } u_5} + f(1) \right]$$

$$= \frac{6}{25} + \frac{1}{5} = \frac{6}{25} + \frac{5}{25} = \frac{11}{25}$$

Donc l'aire approchée sous la courbe est :

$$\frac{6}{25} < A < \frac{11}{25}$$

b) A la main

c) Calculer u_n et v_n en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles d'égale longueur.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ très grand. On prend la subdivision de $[0; 1]$



$$\sigma = \left(0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots; \frac{n-1}{n}; 1 \right)$$

On va utiliser une somme "connue" :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{CR11}$$

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \cdot f(0) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{2n^3 - 3n + 1}{6n^3} \end{aligned}$$

$$V_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n + 1}{6n^3}$$

On a "borne" l'aire :

$$\frac{2n^3 - 3n + 1}{6n^3} < A < \frac{2n^3 + 3n + 1}{6n^3}$$

On utilise le théorème des deux gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{6n^3} < A < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n + 1}{6n^3}$$

$$\frac{1}{3} < A < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 f(x) dx$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{rectangle} \\ \sim dx \end{array} \right\} f(x)$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Le signe $\int$ a été introduit par Bernoulli

en 1690.

Le calcul intégral a été introduit bien avant le calcul différentiel.

(Archimède, Kepler, Newton et Leibniz)