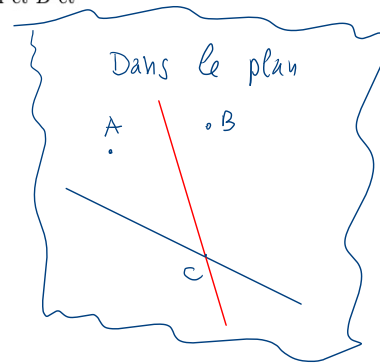
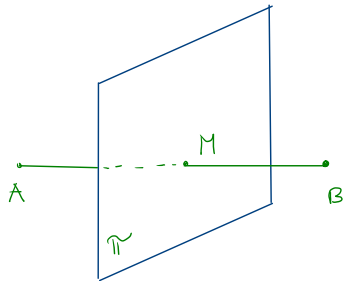


30.09.26

3.7.10 On donne les points $A(2; 9; 6)$ et $B(8; 1; 10)$ ainsi que la droite

$$d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

- a) Calculer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère passant par A et B et dont le centre est sur d .



Le centre de la sphère se situe à l'intersection de la droite d et du plan médiateur π de AB .

• Milieu de AB : $M(5; 5; 8)$

• $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\pi): 3x - 4y + 2z + d = 0$ $15 - 20 + 16 = -d$

par π : $(\pi): 3x - 4y + 2z - 11 = 0$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z - 11 = 0 \\ x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{3} + 6k - \underline{4} - \underline{4k} + \underline{4k} - \underline{11} = 0$$

$$6k = 12 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

$$\Rightarrow C(5; 3; 4)$$

Et on calcule $\vec{AC}$: $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Rayon: } \|\vec{AC}\| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$$

$$(\Sigma): (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 49$$

$$(\Sigma): (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 49$$

$$C(5; 3; 4)$$

$$R = 7$$

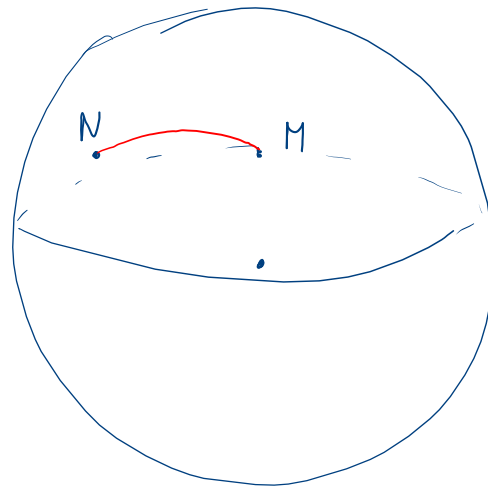
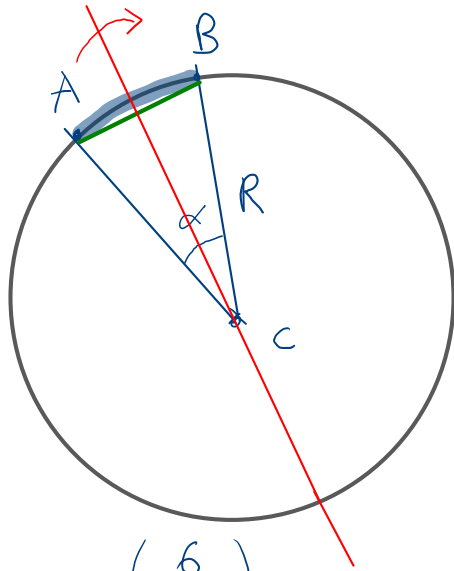
b) La sphère coupe-t-elle le plan d'équation $6x + 3y - 2z + 25 = 0$?

(α):

$$d(\alpha, C) = \frac{|6 \cdot 5 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 25|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{56}{7} = 8 > R$$

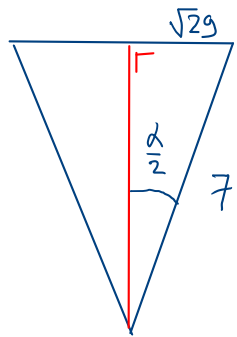
Le plan ne coupe pas la sphère.

- c) Quelle est, sur la sphère, la plus courte distance entre A et B ?
- d) Déterminer une équation paramétrique d'un axe de rotation laissant la sphère invariante et qui échange les points A et B .



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{36 + 64 + 16} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$



$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{29}}{7} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx 50,29^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 100,58^\circ$$

$$\text{Arc } \widehat{AB} = 100,58 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 7 \approx 12,29$$

d) Axe : droite qui passe par C et le milieu de AB , M .

$$\vec{CM} = \vec{OM} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Axe : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

